3. Übung zu Methoden der Signalverarbeitung

Short-Time-Fourier-Transformation

1 Fourier-Transformation

1.1 Definition

Die Fourier-Transformation ist als das Innenprodukt des zu untersuchenden Signals $x(t)$ mit der komplexen Schwingung $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi f t}$ definiert

$$X(f) = \left\langle x(t), \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f t} \right\rangle_t = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Sie stellt einen Vergleich des zu untersuchenden Signals mit der komplexen Exponentialfunktion verschiedener Frequenzen dar.

Im Folgenden wird die diskrete Fourier-Transformation betrachtet. Dabei wird das Signal zunächst mit der Frequenz f_A abgetastet, wodurch im Spektrum periodische Wiederholungen im Abstand f_A auftreten. Die Beobachtungsdauer T im Zeitbereich beschränkt sich auf N Abtastpunkte. Zusätzlich wird das Spektrum diskretisiert mit der Frequenzauflösung

$$\Delta f = \frac{f_\mathrm{A}}{N} = \frac{1}{N \cdot t_\mathrm{A}} = \frac{1}{T}\,,$$

so dass ebenfalls N Abtastpunkte im Nyquistband $-f_\mathrm{A}/2 \leq f \leq f_\mathrm{A}/2$ liegen. Die Abtastung des Spektrums führt wiederum zu einer periodischen Wiederholung im Zeitbereich im Abstand T.

Somit ist die diskrete Fourier-Transformation gegeben durch:

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp\left(-\mathrm{j}2\pi \frac{kn}{N}\right) \quad \text{mit} \quad n = 0, \ldots, N-1\,.$$

1.2 Abtasttheorem

Bei der Wahl der Abtastfrequenz f_A muss das Abtasttheorem beachtet werden. Für eine eindeutige Zuordnung des Spektrums zu den tatsächlich im Signal auftretenden Frequenzen muss die Abtastfrequenz f_A mindestens doppelt so hoch wie die höchste im Signal vorkommende Frequenzkomponente sein, da andernfalls das Spektrum im Nyquistband durch die periodischen Wiederholungen verfälscht wird ($=$ Aliasing). Gegebenenfalls wird das Signal *vor der Abtastung* durch ein *analoges* Filter bandbegrenzt.

Beispiel 1 (Abtastung zweier verschiedener Sinus-Signale)
In Abbildung 1 sind zwei Sinus-Signale dargestellt und mit der gleichen Abtastfrequenz $t_\mathrm{A} = 3{,}14\,\mathrm{s}$ bzw. $\omega_A = 2\,\frac{1}{\mathrm{s}}$ abgetastet. Die Punkte markieren dabei einander entsprechende Abtastwerte. Das heißt: Alleine aus den Abtastwerten können die beiden Signale nicht unterschieden werden. ■

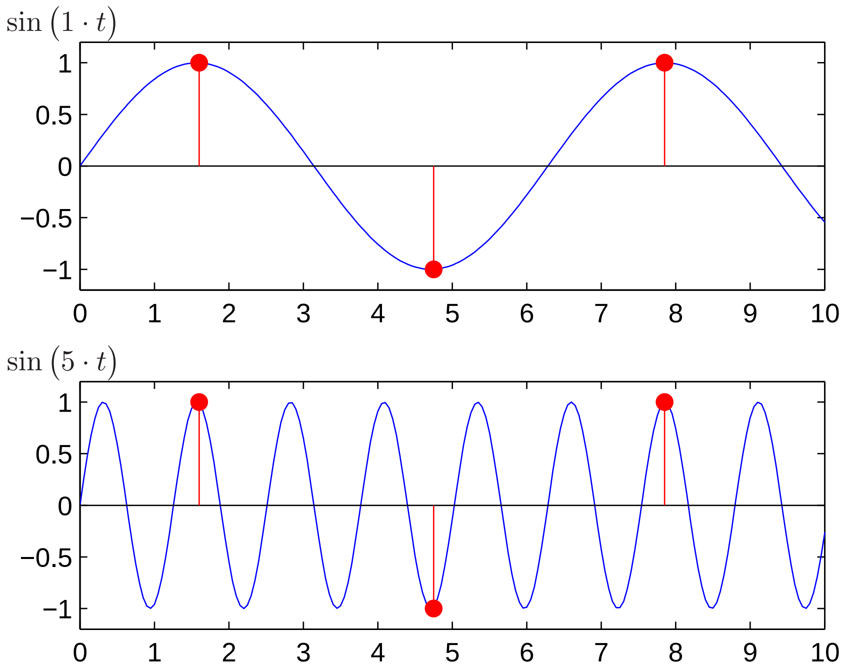


Abbildung 1: Abgetastete Sinus-Signale

1.3 Leckeffekt

Wird ein Signal im Zeitbereich gefenstert, entspricht dies einer Faltung der Spektren des Signals und des Fensters. Die daraus resultierende Verfälschung des Signalspektrums wird als *Leckeffekt* bezeichnet. Bei der diskreten Fourier-Transformation entspricht die Begrenzung auf N Abtastwerte einer Rechteckfensterung des Signals, daher ist zu erwarten, dass sie stets mit einem Leckeffekt behaftet ist.

Dabei ist allerdings zu beachten, dass das Signal im Zeitbereich aufgrund der Diskretisierung des Spektrums periodisch fortgesetzt wird. Wenn sich das untersuchte Signal das Abtasttheorem erfüllt und sich darüber hinaus ausschließlich aus diskreten Frequenzen zusammengesetzt, die ganzzahligen Vielfachen der Frequenzauflösung Δf entsprechen, dann ist das periodisch fortgesetzte Signal identisch mit dem ursprünglichen (ungefensterten) Signal, so dass der Leckeffekt entfällt.

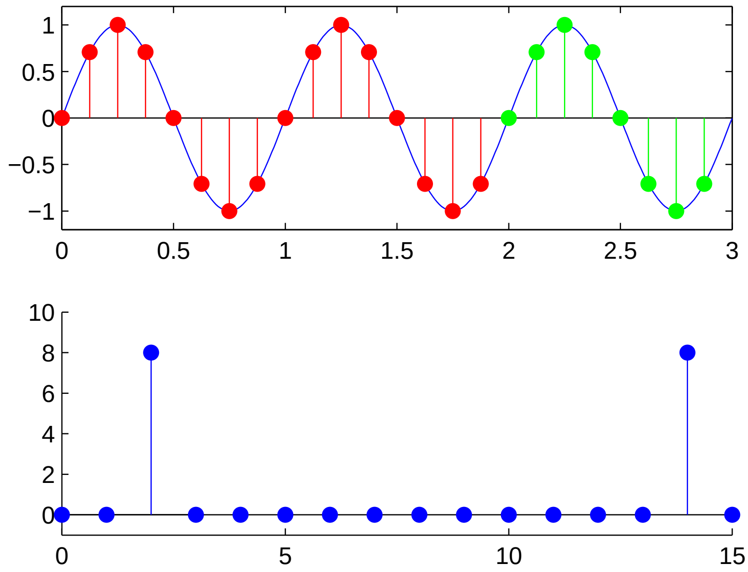
Andernfalls kann es bei der periodischen Fortsetzung des gefensterten Signals zu Sprungstellen kommen, die sich durch hohe Frequenzanteile im Spektrum äußern.

Beispiel 2 (Leckeffekt durch periodische Fortsetzung)

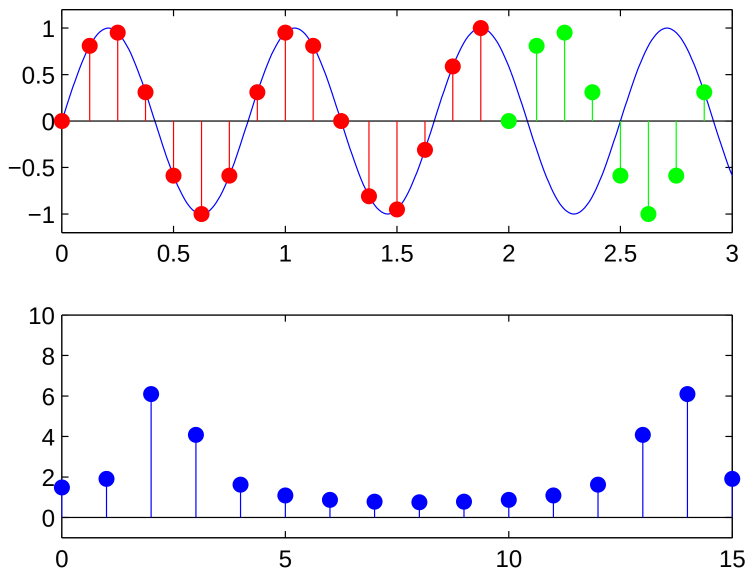
Im Folgenden werden zwei leicht verschiedene Sinus-Signale abgetastet. Bei beiden Signalen wird die Anzahl der Abtastpunkte auf $N = 16$ sowie die Abtastfrequenz auf $f_\mathrm{A} = 8\,\mathrm{Hz}$ festgelegt. Das erste Signal, ein $1\,\mathrm{Hz}$-Sinus und die zugehörige FFT sind in Abbildung 2(a) dargestellt.

Da sich das abgetastete Signal problemlos periodisch fortsetzen lässt – es stimmt exakt mit dem kontinuierlichen, unendlichen Signal überein – entsteht kein Leckeffekt. Die schnelle Fourier-Transformation (FFT) gibt genau die Frequenz $2 \cdot \Delta f = 1\,\mathrm{Hz}$ wieder ($\Delta f = f_\mathrm{A}/N = 8\,\mathrm{Hz}/16 = 0{,}5\,\mathrm{Hz}$). Verändert man allerdings die Frequenz nur leicht auf $f = 1{,}2\,\mathrm{Hz}$, so kann das Signal nicht mehr einwandfrei periodisch fortgesetzt werden. Es kommt zu Unstetigkeiten im Übergang und somit zum Leckeffekt (siehe Abbildung 2(b)).

Es sei angemerkt, dass hier Aliasing keine Rolle spielt. Beide Signale sind mit $8\,\mathrm{Hz}$ ausreichend hochfrequent abgetastet.



(a) $1\,\mathrm{Hz}$-Sinus und FFT (Betrag)



(b) $1{,}2\,\mathrm{Hz}$ Sinus und FFT (Betrag)

Abbildung 2: Leckeffekt

■

Um den Leckeffekt zu reduzieren, werden geeignete Fenster eingesetzt. Diese dienen lediglich dazu, das Signal an den Rändern abzuflachen, um eine stetige periodische Fortsetzung zu ermöglichen. Allerdings wird durch die Fensterung die Signalenergie verändert, wodurch insbesondere bei sehr kurzen, stark dämpfenden Fenstern eine Signalverarbeitung nicht mehr möglich ist.

2 Short-Time-Fourier-Transformation

Die Short-Time-Fourier-Transformation (STFT) kann als logische Konsequenz der Fourier-Transformation aus technischer Sicht angesehen werden.

2.1 Definition

Bei der STFT wird das Signal mit einem Fenster γ multipliziert, dessen Zeitdauer kurz ist im Vergleich zur Signallänge. Dieses Fenster wird über das gesamte Signal verschoben. Daraus ergibt sich folgende Definition der STFT

$$F_x^\gamma\big(\tau,f\big) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot\gamma^*(t-\tau)\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Die Konsequenz ist, dass die STFT eine zweidimensionale Funktion der Zeitverschiebung τ und der Frequenz f ist.
Bisher wurde die STFT als Fourier-Transformierte des gefensterten Signals interpretiert. Dies entspricht der Bildung des Innenproduktes aus dem gefensterten Signal und einer Harmonischen:

$$F_x^\gamma\big(\tau,f\big) = \Big\langle x(t)\cdot\gamma^*(t-\tau), \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f t}\Big\rangle$$

Durch eine Umformung des Innenproduktes ergibt sich eine neue Interpretation, nämlich ein Vergleich des Signals mit einem zeit- und frequenzverschobenen Fenster:

$$F_x^\gamma\big(\tau,f\big) = \Big\langle x(t), \gamma(t-\tau)\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f t}\Big\rangle$$

Für ein bestimmtes τ und f ist die Short-Time-Fourier-Transformierte $F_x^\gamma\big(\tau,f\big)$ ein Maß für die Ähnlichkeit des Signals $x(t)$ mit einem Fenster, dessen Signalenergie um die mittlere Zeit τ und die mittlere Frequenz f konzentriert ist. Da das Fenster eine endliche Zeitdauer und Bandbreite besitzt, ist die Aussage der STFT darüber, wie stark die Frequenz f zum Zeitpunkt τ im Signal $x(t)$ enthalten ist, ungenau.
Bei der klassischen Fourier-Transformation wird mit einer Harmonischen verglichen, deren Bandbreite Null ist. Dadurch erhält man eine exakte Information über die enthaltenen Frequenzen im Signal. Aufgrund der unendlichen Zeitdauer enthält das Spektrum jedoch keine zeitliche Information. Bei der STFT wird diese durch eine Verschlechterung der Auflösung des Spektrums erkauft. Das Verhältnis von Zeit- und Frequenzauflösung wird durch die Wahl der Zeitdauer des Fensters bestimmt. Dabei bleibt das Zeitdauer-Bandbreite-Produkt jedoch konstant: Dieses hängt ausschließlich von der Form des gewählten Fensters ab.
Für ein festes $\tau = \tau_0$ verhält sich die STFT genauso wie eine Fourier-Transformation eines gefensterten Signals, das heißt, Aliasing und Leckeffekt treten genauso auf und müssen bei der Wahl der Fensterfunktion γ und der Abtastfrequenz f_A berücksichtigt werden.
Die Gabor-Reihe kann als Zwischenschritt zur diskreten STFT verstanden werden: Das Signal liegt zwar noch kontinuierlich vor, das Fenster wird jedoch in diskreten Schritten τ und f verschoben. Es entsteht eine Abtastung des Zeit-Frequenz-Spektrums.
Beim Übergang zur diskreten STFT liegen sowohl das Signal $x(n)$ als auch das Fenster $\gamma(n)$ mit der gleichen Frequenz f_A abgetastet vor. Die diskrete zeitliche Verschiebung des Analysefensters beträgt ΔM Abtast-

punkte, K bezeichnet die Anzahl der diskreten Fensterpositionen in Frequenzrichtung innerhalb des Nyquistbandes.

$$F_x^\gamma(m,k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot \gamma^*(n - m\Delta M) \cdot \exp\left(\mathrm{j}2\pi \frac{kn}{K}\right)$$

2.2 Spektrogramm

Als *Spektrogramm* wird das Betragsquadrat der STFT bezeichnet:

$$S_x^\gamma(\tau,f) = |F_x^\gamma(\tau,f)|^2$$

2.3 Eigenschaften der STFT

Die wichtigste Eigenschaft der STFT ist die Translationsinvarianz in Zeit- und Frequenzrichtung. Es gilt:

$$\begin{aligned}
x_0(t) &= x(t - t_0) & \Rightarrow \quad & F_{x_0}^\gamma(\tau,f) = F_x^\gamma(t - t_0,f) \exp\big(-\mathrm{j}2\pi f t_0\big) \\
x_0(t) &= x(t) \cdot \exp(\mathrm{j}2\pi f_0 t) & \Rightarrow \quad & F_{x_0}^\gamma(\tau,f) = F_x^\gamma(\tau,f - f_0)
\end{aligned}$$

2.4 Rekonstruktion des Signals

Die Rekonstruktion des Signals aus seiner Short-Time-Fouriertransformierten gelingt mit Hilfe eines Synthesefensters $\tilde{\gamma}(t)$:

$$\hat{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_x^\gamma(\tau,f) \tilde{\gamma}(t - \tau)\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi f t}\, \mathrm{d}\tau\, \mathrm{d}f$$

Im kontinuierlichen Fall muss $\tilde{\gamma}(t)$ dafür lediglich die Bedingung

$$\langle \tilde{\gamma}(t), \gamma(t) \rangle = 1$$

erfüllen. Bei der Gabor-Reihe muss die *Wexler-Raz-Beziehung* (Biorthogonalitätsbedingung für Analyse- und Synthesefenster) erfüllt sein:

$$\frac{1}{TF} \left\langle \tilde{\gamma}(t), \gamma(t - k/F)\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi m t/T} \right\rangle = \delta(m)\delta(k)$$

Eine entsprechende Bedingung existiert für die diskrete STFT.

2.5 Beispiele

Beispiel 3 (Fourier-Transformation eines zeitvarianten Signals)
Gegeben sei das zeitvariante Signal $x(t)$ im Zeitbereich von 0 bis $8\,\mathrm{s}$ mit:

$$x(t) = \sin\big(2\pi(f + 0{,}08t) \cdot t\big)$$

Das Signal wird auf der ganzen Länge mit $N = 64$ Punkten abgetastet. Daraus wird die FFT berechnet. In Abbildung 3 sind sowohl das Signal als auch das Betragsquadrat des Spektrums dargestellt.

■

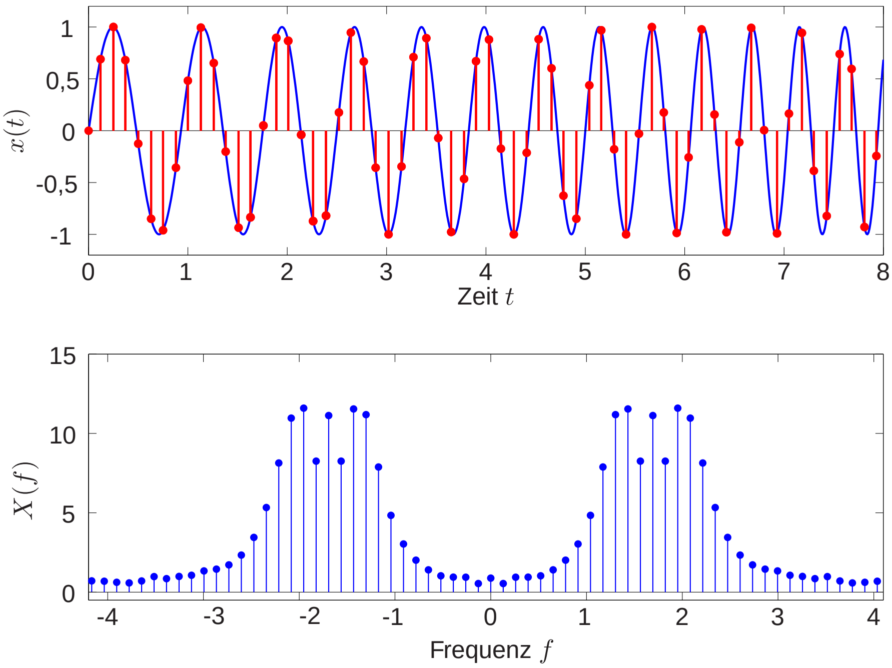


Abbildung 3: Zeitvarianter Sinus und seine FFT (Betrag)

Beispiel 4 (Short-Time-Fourier-Transformation eines zeitvarianten Signals)
Gegeben ist wiederum das zeitvariante Signal $x(t)$ im Zeitbereich von 0 bis $8\,\mathrm{s}$ mit:

$$x(t) = \sin\big(2\pi(f + 0{,}08t)\cdot t\big)$$

Diesmal wird allerdings ein Rechteckfenster der Länge $N' = 16$ verwendet, das verschoben wird. Die Anzahl der Abtastpunkte $N = 64$ des gesamten Signals bleibt unverändert.
Die Abbildungen 4 und 5 zeigen das Spektrum des verschobenen Fensters zu den Zeitpunkten $\tau = 0$ und $\tau = 48t_\mathrm{A}$.

■

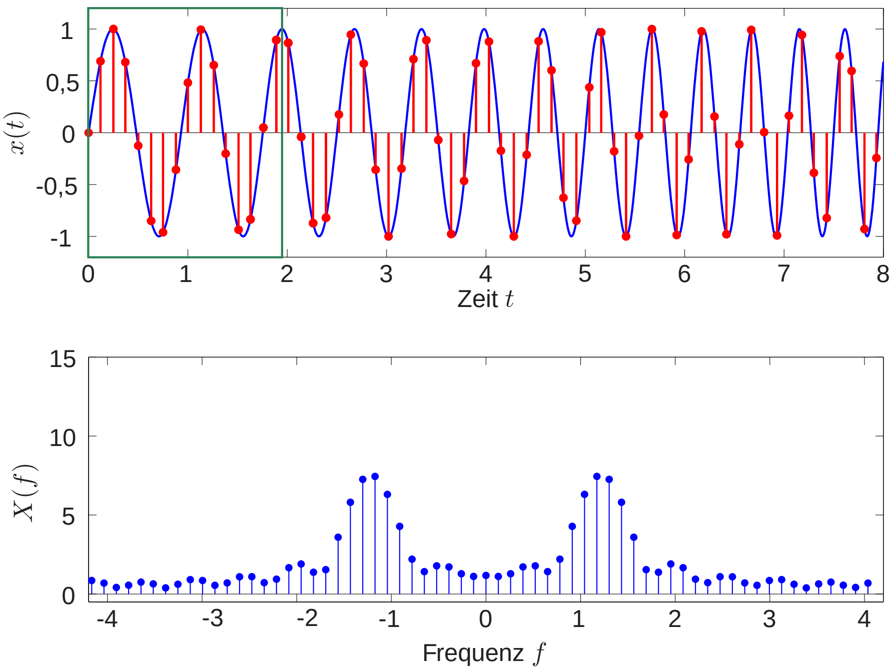


Abbildung 4: Zeitvarianter Sinus und seine STFT (Betrag) bei $\tau = 0$

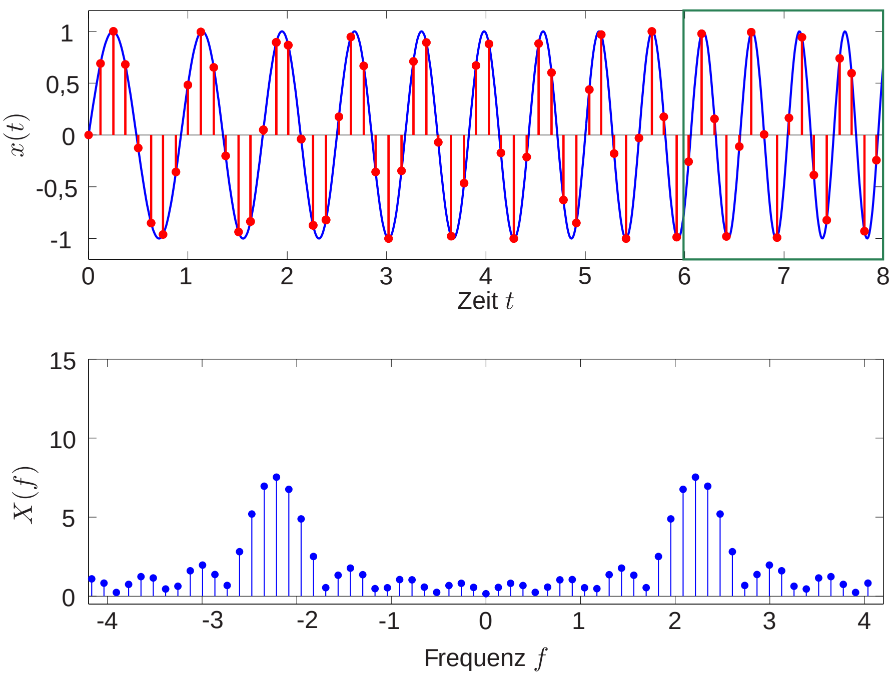


Abbildung 5: Zeitvarianter Sinus und seine STFT (Betrag) bei $\tau = 6\,\mathrm{s}$

Aufgabe 1: Short-Time-Fourier-Transformation I

Berechnen Sie die STFT für folgende Spezialfälle:

a) Analysefenster mit Bandbreite $\Delta_f = 0$ und Zeitdauer $\Delta_t = \infty$:

$$\gamma(t) = 1 \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \Gamma(f) = \delta(f)$$

b) Analysefenster mit Zeitdauer $\Delta_t = 0$ und Bandbreite $\Delta_f = \infty$:

$$\gamma(t) = \delta(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \Gamma(f) = 1$$

Aufgabe 2: Short-Time-Fourier-Transformation II

Gegeben sei folgendes Signal $x(t)$:

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\alpha|t|}$$

Dieses Signal soll mit Hilfe der Fensterfunktion

$$\gamma(t) = \mathrm{e}^{-\beta|t|}$$

untersucht werden. Bestimmen Sie die Short-Time-Fourier-Transformierte.

Aufgabe 3: STFT-Rückgewinnung

Gegeben sei das Signal

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t^2},$$

das mit der STFT untersucht werden soll.

a) Bestimmen Sie die Short-Time-Fourier-Transformierte mit Hilfe des Fensters $\gamma(t) = \mathrm{e}^{-\beta t^2}$.

b) Als Synthesefenster wird $\tilde{\gamma}(t) = c \cdot \mathrm{e}^{-\beta t^2}$ angesetzt. Bestimmen Sie den Faktor c so, dass eine Signalrekonstruktion möglich ist.

c) Berechnen Sie das ursprüngliche Signal aus der Short-Time-Fourier-Transformierten.